拓展专题教学讲稿

覃宇林

2019 年 6 月 27 日

contents

§I 数学语言

不同层次的人对数学的理解有不同的深度，有的人认为数学是一堆一堆的数的运算组成的集合，有的人认为数学是一堆又一堆的符号，但在对数学理解比较深的人们看来，数学是大自然的语言，数学语言是数学存在的家，数学语言是真善美的统一. 本节内容主要参考 [*2*]

$\Re$1 数学的真-形式逻辑自洽

数学语言的第一特性是形式逻辑自洽的，现代数学语言中的每个规范术语都是在某个数学公理体系里面被严格定义的，Hilbert 在 1904 年提出了一个数学公理体系在数学中能存在的必要条件：它的所有公理在形式逻辑推理过程中是自洽的，也就是说利用数学语言，不可能推出形式逻辑上的矛盾。因此数学上的存在只要满足自身有矛盾，那么便可以说这个东西在数学上是存在的。我们可以定义各种各样的新数学，定义总是可以的，但其是否存在则需要我们由此出发看是否会导出矛盾，如果这个体系自身逻辑自洽，并且与已知的自洽的数学体系不相矛盾，那么我们就说这在数学上是存在的，因而数学是真实存在的，是可以判断其存在性的，是真真切切的东西，其形式逻辑自洽性体现了数学的"真"。比如我们可以定义：

$$1+1=0$$

这样定义是可以的，但其存在性是需要讨论的，很显然如果那样定义之后，我们有：

$$2=2+0=2+1+1=3+1=4$$

这样我们便推出了矛盾，所以我们就说这样的等式 $1+1=0$ 是不存在的，在数学上是不存在的，因为由此出发我们推出了自相矛盾的等式。
比如虚数和非欧几何都是这样产生的。正是由于这样，数学家就可以不受已有体系的思想束缚，大胆的运用想象力，发现新的形式逻辑自洽体系，如果这个体系对数学的发展比较重要，那么更多的人研究这个体系，从而数学得到了新的发展。因此数学思维可以充分展现人类的本质力量–创造力。

$\Re$2 数学的善-数学语言的魔力

通过数学语言，通过简单的方程，几个符号串就能准确的表达大自然中最基本的规律，如：

$$F=G\frac{m}{M}r^2$$

这是万有引力定律，天体经典描述的几乎一切信息都蕴含在这个方程里面，通过这个方程我们可以初步了解整个宇宙的天体运动规律，可以由此得到要制造人造卫星所要满足的最基本条件，可以解释为什么自然界的物体都会掉向地面而非飞向天空，可以解释为什么海平面是球面等等。

$$E=mc^2$$

这是爱因斯坦著名的质能方程，通过这个方程我们可以理解为什么质量和能量是统一的，可以看到原子内部所蕴含的巨大能量，可以明白为什么原子弹的威力如此之大。

$$\begin{aligned}
&\oiint D\cdot dS=q_0\\
&\oint E\cdot dl=-\iint\frac{\partial B}{\partial t}\cdot dS\\
&\oiint B\cdot dS=0
\end{aligned}$$

$$\oint H \cdot dl = I_0 + \iint \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS$$

上面的方程组便是著名的麦克斯韦方程组，通过一个简单的数学表达式便可以描述几乎整个电磁世界，而电与磁几乎成为了当今生活不可缺少的一部分。上面这个方程组还蕴涵着电磁波的存在性，并且给出了电磁波的传播速度为光速，而电磁波也是当下生活不可或缺的一部分，而这所有的这一切，都是通过数学语言来描述的。

$$i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$$

上面这个方程便是量子力学里面最基本的 Schrodinger 方程，通过这么一个简单的方程便可以描述整个微观体系，能让我们明白原子的结构，材料呈现半导体性质的物理机制，以及各种各样的问题

通过数学语言，可以研究太阳系。大自然背后的数学方程是牛顿的伟大发现；通过数学语言，可以研究约 13 亿年前两个黑洞合并产生的引力波，130 亿年前的早期宇宙；通过数学语言，可以研究原子，电子，夸克 (10^{-18}m)，在如此小的空间中用数学语言能做到精确的描述和计算，只能运用数学语言才能做到；通过数学语言可以研究晶体的结构，核磁共振光谱学等；通过数学语言可以研究 DNA 双螺旋结构的拓扑性质；通过数学语言可以研究神经元的脉冲传导过程，遗传的统计规律，种群的生长模型

数学也有很多的运用，数学可以运用于场效应管的制造工艺与模拟，电路的逻辑设计与物理设计；可以运用于机器证明，密码学，信息压缩，可以运用于经济学中的资源最优配置等，可以运用于音乐和声分析等所有的这一切自然界规律的呈现能有如此简单的形式都归结于数学语言，数学语言就是大自然的语言，是数学存在的家，通过数学语言我们能用简单的几个字符串描述自然界运行的规律，不得不说数学具有着无与伦比的魔力。而所有的这一切都我们都可以通过数学语言来了解自然界，与自然界和谐相处，这体现了数学的"善"。

$\Re$3 数学的美-永恒之美

毕达哥拉斯学派认为美表现在称性，数学美表现于行的对称，数的和谐，逻辑的自洽，例如圆，欧几里得几何公理体系的逻辑自洽。

苏格拉底认为美与善是一致的。数学美与数学的广泛运用是一致的。例如牛顿-莱布尼茨公式（微积分学中的最基本公式，可以解决一大类积分计算问题)，傅立叶级数 (可以广泛运用于信号分析，频谱分析，傅立叶光学等)，厄米矩阵的对角化（可以计算量子力学里面的本征谱)，群的概念（运用十分广泛，几乎任何一个现代数学领域都会涉及到群）等等。

黑格尔认为美是理性的感性显现。数学美是自洽逻辑体系的数形显现。例如：欧几里得几何的逻辑体系，复数（二元数）的逻辑体系，四元数的逻辑体系，等等。

马克思认为美是人的本质力量的对象化。数学美是人的本质力量的精确符号化。例如：古代数学中的欧几里得公设，阿基米德的球体积公式，近代数学的牛顿-莱布尼茨公式，高斯曲率内蕴性，现代数学中的伽罗瓦群等，Bott 周期律，Atiya-Singer 指标定理等，这些数学成就都是人类本质力量在那个时代的代表，它们都已经转化成了精确的符号:

$$// \qquad \perp \qquad \cong \qquad \sim \qquad etc$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$< dF, [a,b] > = < F, \partial[a,b] >$$

$$\oint_C \kappa_g \,\mathrm{d}s + \iint_D K \,\mathrm{d}\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$\iint_D K \,\mathrm{d}\sigma = 2\pi\chi(S)$$

$$Gal(x^2+bx+c)=S_2=\{1,(1,2)\}$$
$$Gal(x^3+ax^2+bx+c)=S_3\supset A_3=\{1,(1,2)(1,3),(1,3)(1,2)\}$$

这些符号将被人类一代又一代的传承下去，获得永恒。这就是数学特有的永恒美。数学语言实质上是人类在实践和发展中追求“永恒真善美”的产物，是大自然的语言。

§II 数学物理思维-形，数，逻辑，自然理性

$\Re$1 形，数，逻辑，自然理性的统一

数学语言是数学思维的表达。数学中至少有四种基本的思维方式：形，数，逻辑，自然理性，他们的统一对数学的发展起着十分重要的作用 [2]。

- 形的思维方式：点，直线，平面，圆，三角形，球面，多面体，空间，平行，相似，距离等等；
- 数的思维方式：自然数，有理数，实数，二元数，四元数，集合，矩阵，多项式，数列，不等式等等；
- 逻辑的思维方式：公设，公理，推理法则，定义，命题，充分条件，必要条件，逻辑体系，逆否命题等等；
- 自然理性的思维方式：对应物理学中的术语：变量对应运动，导数对应速度，二阶导数对应加速度，积分对应功等；

$\oint$1 形与逻辑的统一

数与形的统一是在公元前 300 年左右有欧几里得完成的。在古希腊时代，欧几里得的几何原本一书，就实现了形与逻辑的统一，欧几里得几何的五条公理便是逻辑的思维方式:

- 第一公设任意给定两个不同的点，可以作唯一一条以此两点为端点的直线段（To draw a straight line from any point to any point)
- 第二公设 任意给定一条直线段，可以从此直线段的任意一端唯一地延长为一个直线段其长度可以任意大（To produce a finite straight line continuously in a straight line)
- 第三公设 以任意给定的点为中心和任意大小的距离为半径可作唯一一个圆（To describe a cicle with any centre and distance)
- 第四公设 所有点处的所有直角都彼此相等（That all right angle are equal to one another)
- 第五公设 如果一条直线段相交于两条直线段，且交成的两个同侧的内角之和小于两个直角之和，则这两条直线段，如果在该侧一直延续下去，必相交于该侧中的一点（That ,if a stright line falling on two stright lines make the interior angles on the same side less than two right angles ,the two stright lines,if produced indefinitely ,meet on that side on which are the angles less than the two right angles)

利用这五个公社，加上各种平行相交，角度的定义，由此导出的欧几里得几何，这也是现在中学生所学的几何，从而第一次实现了形与逻辑的统一，这也是为什么古代希腊的数学不同于其他地方数学的原因，也是为什么欧几里得几何如此重要的原因。

∮2 数学与自然理性的统一

数学与自然理性的统一是在 17 世纪左右由牛顿完成的。牛顿的《自然哲学之数学原理》一书，实现了数学与自然理性的统一，他揭示了自然理性背后的数学方程，他提出的三大定律：

- 牛顿第一定律 一切物体在没有受到力的情况下，总保持静止状态或匀速直线状态
- 牛顿第二定律
$$\frac{dp}{dt} = F$$
- 牛顿第三定律 作用力与反作用力总是大小相等方向相反

加上万有引力定律便可以导出经典物理的大厦，从而将物理（自然理性）的研究提升到了定量的方程描述中，在人类史上第一次实现了数学与自然理性的统一，从此改变了科学研究的面貌。因此牛顿是“大神”，他的地位几乎是无法撼动的，他的理论是非常重要的，因此牛顿的理论放在现在基本上是高中生必修的内容。

∮3 数与形的统一

数与形的统一是在 17 世纪由笛卡尔和费马实现的。笛卡尔创立了平面直角坐标系，从而可以将几何图形利用代数方程来表达，比如高中要学的圆锥曲线，平面向量，空间向量等都是基于数形的统一，利用计算来解决几何问题，正因为实现了数与形的统一，所以笛卡尔的理论，解析几何的理论才变得如此的重要，以至于是现代高中生的数学的必修内容。

∮4 数与逻辑的统一

但是，数与逻辑的统一是很晚的事情，直到 19 世纪之前，无理数概念一直没有严格定义。这在数学史上造成了两次数学危机：古希腊数学中关于无理数存在性的争议；近代欧洲数学中关于无穷小的争议。19 世纪下半叶，多个数学家从有理数出发建立了实数的理论，如戴德金的有理集的分划理论等，希尔伯特在 1899 年用公理化的方法直接构造了“实数公理体系”，从而实现了“数”与“逻辑”的直接统一，因而实数理论也是非常重要的理论，它是整个现代分析学的基础。这部分内容是现代教育体系里面数学系学生大学本科的基本内容之一。

ℜ2 转变数学思维方式解决数学问题

在当代数学体系里面，数，形，逻辑，自然理性是统一的，他们实现了完全的统一，因此本质上他们都是同一个东西，因此我们就可以不局限于某一个特定的思维方式，有时利用一个思维层面上的问题解决另一个思维层面上的问题也许就更加的简单与意义清晰。

∮1 自然理性思维解决形相关问题-以证明勾股定理

我们假设三角形各边及角的信息如图所示，由于 ASA 全等三角形判定法则我们只需要两个角及其夹边长度便可以完全确定三角形，因此我们选择角 A，B 及斜边长度 c，三角形便确定了，因此三角形的面积为 S=f(A,B,c), 下面我们利用量纲分析来确定此函数，首先写出各个量的量纲：
于是我们可以写出关系式：

$$S = kc^2$$

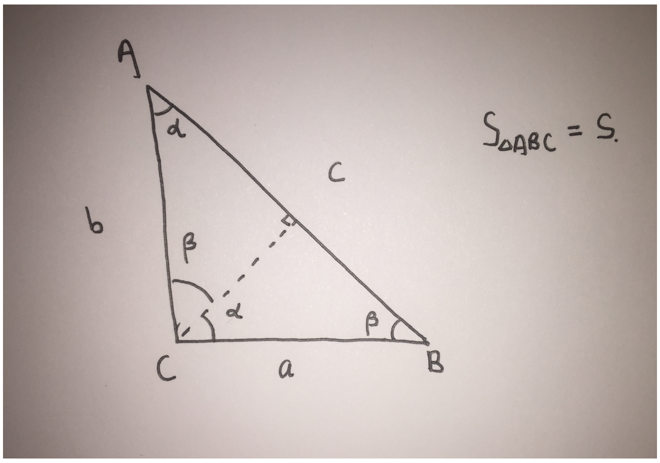

Figure 1: 量纲分析法证明勾股定理

Table 1: 量纲表

量纲	c	A	B	S
m	1	0	0	2
°	0	1	1	0

$$or\ S = kc^2(\frac{A}{B})^m$$

由于 A，B 角对此三角形为定值，可以将因子 $(\frac{A}{B})^m$ 放到系数 k 里面去，统一写成：

$$S = kc^2$$

从直角顶点画斜边的高，分成两个三角形，则图中三个三角形相似，因此对三个三角形比例系数 k 相同，于是我们有：

$$S = kc^2$$
$$S_1 = ka^2\ S_2 = kb^2$$

于是由面积的可叠加性有：

$$S = S_1 + S_2$$
$$kc^2 = kb^2 + ka^2$$
$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

$\oint$2 形的思维方式解决数的问题-以不等式证明为例

我们通过举一个具体的例子来说明如何利用形的思维方式来解决数的问题。

example 0 假设 a_i, b_i 均为非负数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \geq \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2+(\sum_{i=1}^{n}b_i)^2}$$

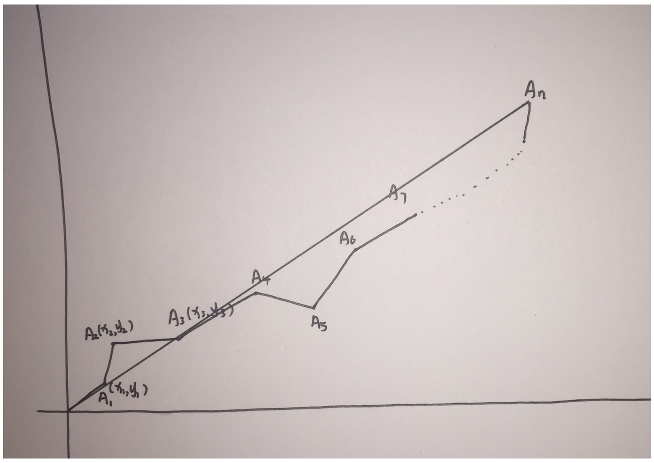

Figure 2: 例 0 图示

并且给出等号成立的条件。初看起来这是一个比较复杂的数学问题，但是如果我们换一个写法，可能会想到利用形来解决这个问题：假设 x_i, y_i 均为非负数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+y_i^2} \geq \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2+(\sum_{i=1}^{n}y_i)^2}$$

并且给出等号成立的条件。

虽然只是将字母 a,b 换成了 x，y 但是更重要的是，这是一种思维层次的转变，已经从数的思维方式转变到了形的思维方式，如果参见（Figure 2）可能看得更清楚，而此题目在形的思维方式里面却变成了一个很显然的结论。在高中数学解题方法专题里面我还会给出更多的例子，限于篇幅，就暂时不举更多的例子了。

$\oint$3 转变思维角度来解决数学问题

有时候通过转变思维角度也能用同种思维方式解决同一问题，我们以数列求和来说明如何利用这个方法：

example 1 求下面通项的前 n 项和：

$$a_n = n^4$$

初看此题，好像也没有什么好的突破口，这是如果你想到代数最基本的处理问题的方式：解方程组，你可能会想到一个办法来解决这个问题，即可以假设：

$$\sum_{i_1}^{n} a_i = x_5n^5 + x_4n^4 + x_3n^3 + x_2n^2 + x_1n + x_0 = f(n)$$

然后通过构造方程组来求出各项系数即可解决这个问题：

$$f(1) = 1 = x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + x_0$$
$$f(2) = \frac{17}{16} = 32x_5 + 16x_4 + 8x_3 + 4x_2 + 2x_1 + x_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

最后只要我们解出了上面的方程组，那么问题就解决了，而解方程组确实一件很简单的事情。

§III 数学历史-古今数学及数学发展

$\Re$1 古代数学

[2] 我对古代数学的定义是古希腊欧几里得 (共元前 300 年）出现之前的数学，那是的数学主要来自二大地区，一个是美索不达米亚地区的数学，另一个是古埃及的数学。那时的数学主要是作为计数的一个工具，用于日常生活中的计数以及简单的数学计算, 而这一时期的数学放在现代教育体系里面大多是属于小学及之前需要学习的数学。

$\oint$1 古代埃及的数学

在古埃及的象形文字中出现了代表各种数字的符号，他们所采用的基底是以 10 为基底的数；埃及把数学记录在纸草书上，为现在留下了大量珍贵的史学资料。古埃及解决了一元一次方程求解的问题，由于测量土地的实际需要在古埃及就出现了几何学，而在几何学上也出现了三角形，圆的面积公式等，但都不是准确的，古埃及是几何学的发源地，但都是一些零碎的，不成体系的几何学；他们显著的数学成就主要可以归结于一下几点:

- 用单位分数表示所有的分数，进行分数运算。单位分数是分子为 1 的分数
- 计算圆的面积公式用:
$$S=(\frac{8D}{9})^2$$
- 有了计算棱锥体体积的准确公式:
$$V=\frac{h}{3}(x^2+xy+y^2)$$

$\oint$2 古巴比伦的数学

美索不达米亚地区的古巴比伦数学主要是计数问题，即用符号来表示数量，在巴比伦数系里面的突出特点是以 60 为基底来表示进位记号，那是古巴比伦处于商业要道，他们发展起来的数学主要用于贸易，都是一些简单的数以及数的运算，他们也发展了一些几何学，但都是简单的在实际中有用的几何学问题，他们总是在需要解决实际问题时才去研究几何学，而古巴比伦主要将这些数学记录在泥板上。古巴比伦人实际上已经知道了二次方程的求根公式，但由于他们不知道负数，因此他们只知道其中一个根. 古巴比伦显著的数学成就主要归纳如下:

- 在数学和天文学计算中，使用六十进制
- 有倒数表，平方表，立方表，立方根表
- 知道一元二次方程 $x^2-bx+c=0$ 的根
- 使用简单的变量代换把一些特殊方程化为标准型，制定标准型方程的数值表，然后通过查这个表来找到解
- 给出了不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 部分整数解的一个列表。
- 计算出几何级数 $1+2+\cdots+2^9=2^10-1$
- 能计算一些简单几何图形的面积和简单立方体的体积
- 知道勾股定理的内容，但不知为何
- 知道相似三角形的对应边成比例

ℜ2 经典数学

经典数学时期主要指古希腊欧几里得《几何原本》（公元前约 300 年）出现之后，牛顿莱布尼茨创立微积分 (17 世纪）之前的数学，这段时期的数学实现了形与逻辑的统一，数与形的统一，使数学走上了公理化体系的道路，这一时期的数学在现代教育体系里面主要数初中和高中所要求的内容，这个时期的主要数学成就有以下几个方面：

∮1 古希腊的欧几里得数学

欧几里得的《几何原本》开创了数学史上公理化体系的先河，他提出五个公理：

- 第一公设任意给定两个不同的点，可以作唯一一条以此两点为端点的直线段（To draw a straight line from any point to any point)
- 第二公设 任意给定一条直线段，可以从此直线段的任意一端唯一地延长为一个直线段其长度可以任意大（To produce a finite straight line continuously in a straight line)
- 第三公设 以任意给定的点为中心和任意大小的距离为半径可作唯一一个圆（To describe a cicle with any centre and distance)
- 第四公设 所有点处的所有直角都彼此相等（That all right angle are equal to one another)
- 第五公设 如果一条直线段相交于两条直线段，且交成的两个同侧的内角之和小于两个直角之和，则这两条直线段，如果在该侧一直延续下去，必相交于该侧中的一点（That ,if a stright line falling on two stright lines make the interior angles on the same side less than two right angles ,the two stright lines,if produced indefinitely ,meet on that side on which are the angles less than the two right angles)

创建了欧几里得几何，引领者数学向着公理化体系发展，有着开拓者的重要影响。这部分内容在现代教育体系里面数学与中学时期的必修内容。

∮2 古代印度的数学

古代印度数学的成就主要罗列如下；

- 有了 0 的运算规则，任何数加 0 等于自身，任何数乘以零等于零
- 能操作式的运用负数，但没有给出负数的公理体系
- 能操作式的运用无理数：
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$$
- 有了求解一元不定方程 ax+by=0 的整数解的一般解法
- 在三角计算中有了正弦函数数值表

∮3 中国古代的数学

中国古代数学的重要著作包括《九章算术》,《四元玉鉴》，对中国古代的数学成就主要归纳如下：

- 多元一次方程组的消元算法，比高斯消元法早出现 1900 年

- 一元二次方程的迭代算法
- 最基本三次方程 $x^3 = A$ 的迭代算法
- 一次同余方程组的整数解问题
- 贾宪三角，杨辉三角（二项式展开系数）
- 一般同余方程组的中国剩余定理
- 祖冲之的圆周率计算，祖亘的祖亘原理等等

由于篇幅所限我们就不一一列举数学成果了，将这一时期的主要数学成就归纳入下：

$\oint$4 最最主要数学成就

- 欧几里得几何-欧几里得毕达哥拉斯学派
- 平面解析几何-笛卡尔，费马
- 一元三次四次方程的求根公式
- 二项式定理及其相关的问题
- 三角函数与解三角形
- 射影几何
- 变量的概念，函数的概念
- 数论的发展

$\Re$3 近代数学

近代数学是从牛顿和莱布尼茨创立微积分（17 世纪）开始，一直到天才数学家，千古奇才伽罗瓦（我称其为数学史上的诸葛亮），这一时期的数学成就主要是由于微积分的创立之后发展出来的，这一时期的数学成就一般在现代中国教育体系里面属于大学数学系本科生的必修内容，其主要的成就归纳如下：

- 牛顿与莱布尼茨的微积分：函数概念，微积分基本定理，微积分的应用，椭圆积分，特殊函数，积分变换，多元函数的微积分等等
- 无穷级数理论：函数的多项式级数展开理论，傅立叶的级数理论，函数的无穷乘积展开理论，级数收敛和发散的问题
- 常微分方程理论
- 偏微分方程理论
- 解析几何与微分几何得到新的发展：高次平面曲线，空间曲线，曲面的度量，曲线曲面的一般理论
- 变分法出现：欧拉拉格朗日方程，最小作用量原理，二次变分理论
- 代数学的新发展—复数的概念，行列式与消元理论，数论的发展
- 复变函数理论，共形映射理论

$\Re$4 现代数学

现代数学我觉得应该从伽罗瓦出现开始，对于这一时期的数学成就在现代的教育体系里，大部分内容都是数学系研究生的必修内容，但不同的方向有不同的要求，鉴于笔者的水平有限，读者的水平有限，我们仅对这一时期的数学简单归纳如下：

$\oint$1 空前绝后的数学奇才伽罗瓦

对于一元高次方程的求根公式是否存在，如果存在如何得到一元高次方程的求根公式这样一个问题，著名的数学家拉格朗日说：或者是这个问题超越了人的智力范围，或者是根的表达式的性质必定不同于当时所知道的一切；天才数学家高斯说：这个问题也许是不能解决的。可就是这样一个问题，年仅 21 岁的伽罗瓦通过新的数学思维方式，他不关注方程的根的具体形式，而是关注方程背后根所组成的这么一个集合，由其满足的一些隐蔽的关系所生成的结构，即方程背后的对称，提出了群的概念，提出正规子群套理论判断是否有根式解，从而将这个问题非常漂亮地解决了，他的思想也引领了从那时起直到现在的数学，他那句名言：
group the operations,clsssify them according their complexities rather than their appearances ;this I believe ,is the misson of future mathmaticians
而他也说得没错，对群的分类确实是自他以后的数学家们一直在做的事情，一直到现在也还没有完全弄明白。遗憾的是这个千古奇才却在写完他的这篇论文后在一场与人的决斗中丧生了，年仅 21 岁！

$\oint$2 最最重要的数学成就

- 伽罗瓦理论
- 四元数，线性代数
- 矩阵与行列式
- 非欧几里得几何
- 高斯和黎曼的微分几何
- 射影几何和度量几何
- 代数几何
- 实数的构造理论与集合论
- 实变函数论
- 积分方程
- 泛函分析
- 发散级数
- 张量分析
- 抽象群，环，域，模，格理论
- 拓扑学

§IV 高中数学解题方法专题

本节内容主要参考 [*1*]

$\Re$1 转化归类法

所谓转化归类法就是说将一个问题转化为我们已经解决的问题，这是很常用的一种思维，我们举下面的一个例子来说明这种方法的应用：

example 0 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{3}, a_{n=1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

solution 作三角代换: 令 $a_1 = \frac{1}{3} = cost, t \in (0, \frac{\pi}{2})$，则有：

$$a_2 = \sqrt{\frac{1+cost}{2}} = cos\frac{t}{2}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}} = cos\frac{t}{2^{n-1}}$$

所以可以知道通项公式为：

$$a_n = cos(\frac{1}{2^{n-1}}arccos\frac{1}{3}).$$

$\Re$2 反证法

所谓反正法，就是首先假设我们所要证明的结论的否命题成立，然后再由之进行严格的推到，推导出与已知公理或结论相矛盾的结论，从而说明假设不成立，从而说明原命题是成立的。我们还是举一个具体的例子说明怎么利用反证法：

example 1 证明：对任意的一个三角形，一定存在它的两条边长 a,b, 满足：

$$1 \le \frac{a}{b} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

solution 假设结论不成立，则对于 $\triangle ABC$ 的三边长 a,b,c, 不妨设 $c \le b \le a$, 于是我们有：

$$\frac{a}{b} \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{b}{c} \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

即有：

$$\frac{b}{a} \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{c}{b} \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

从而有：

$$\frac{b+c}{a} = \frac{b}{a}\left(1+\frac{c}{b}\right) \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 1$$

这与 $b+c > a$ 矛盾, 所以假设不成立，原命题成立。

$\Re$3 数学归纳法

数学归纳法通熟的说法就是多米洛骨牌效应，它具有多种形式：

- 第一数学归纳法 设 p(n) 是一个含有正整数 n 的一个命题，如果：

  1. p(1) 成立；
  2. 在 p(k) 成立的假设下，可以证明 p(k+1) 成立；

  那么对于所有的正整数 n,p(n) 都成立；

- 推广的第一数学归纳法 设 p(n) 是一个含有正整数 n 的一个命题，如果:

  1. p(n), 当 $n = n_0$ 时成立;
  2. 在 p(k)（$k \geq n_0$) 成立的假设下，可以证明 p(k+1) 成立;

  那么对于所有的正整数 n($n \geq n_0$),p(n) 都成立;

- 第二数学归纳法 设 p(n) 是一个含有正整数 n 的一个命题，如果:

  1. p(1) 成立;
  2. 在 p(m)（$m \leq k$) 成立的假设下，可以证明 p(k+1) 成立;

  那么对于所有的正整数 n,p(n) 都成立;

- 推广的第二数学归纳法 设 p(n) 是一个含有正整数 n 的一个命题，如果:

  1. p(n), 当 $n = n_0$ 时成立;
  2. 在 p(m)（$n_0 \leq m \leq k$) 成立的假设下，可以证明 p(k+1) 成立;

  那么对于所有的正整数 n($n \geq n_0$),p(n) 都成立;

- 反向数学归纳法 设 p(n) 是一个含有正整数 n 的一个命题，如果:

  1. p(n) 对于无限多个 n 成立;
  2. 在 p(k+1) 成立的假设下，可以证明 p(k) 成立;

  那么对于所有的正整数 n($n \geq n_0$),p(n) 都成立;

- 推广的反向数学归纳法 设 p(n) 是一个含有正整数 n 的一个命题，如果:

  1. p(n) 对于某个正整数 m_0 成立;
  2. 在 p(k+1) 成立的假设下，可以证明 p(k) 成立;

  那么对于所有的正整数 n($n \leq m_0$),p(n) 都成立

- 双参数数学归纳法 设 p(n，m) 是一个含有正整数 n，m 的一个命题，如果:

  1. p(1，m) 对于任意的 m 成立，p（n，1）对于任意的 n 成立
  2. 在 p(n+1，m)，p（n，m+1）成立的假设下，可以证明 p(n+1，m+1) 成立;

  那么对于所有的正整数 n，m，p(n，m) 都成立

下面我们通过一个具体的例子说明如何利用数学归纳法:
example 2 设 $\{x_n\}$ 是一个实数列，且对任意的非负整数 n，满足:

$$x_0^3 + x_1^3 + \cdots + x_n^3 = (x_0 + x_1 + \cdots + x_n)^2$$

证明：对所有的非负整数 n，存在整数 m，使得:

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \frac{m(m+1)}{2}$$

solution 当 n=0 时，由题设我们有:

$$x_0^3 = x_0^2$$

解得 x_0=0 或 1，这是可以取 m=0 或 1，从而 n=0 时结论成立。假设 n=k 时结论成立，即当:

$$x_0^3 + x_1^3 + \cdots + x_k^3 = (x_0 + x_1 + \cdots + x_k)^2$$

存在整数 m，满足:

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_k = \frac{m(m+1)}{2}$$

为书写方便，我们设 $x_0 + x_1 + \cdots + x_k = \frac{m(m+1)}{2} = c$, 则有:

$$x_0^3 + x_1^3 + \cdots + x_k^3 = c^2$$

当 n=k+1 时，依题设有:

$$x_0^3 + x_1^3 + \cdots + x_n^3 + x_{k=1}^3 = (x_0 + x_1 + \cdots + x_n + x_{k+1})^2$$

有 n=k 时命题成立我们有:

$$c^2 + x_{k=1}^3 = (c + x_{k+1})^2 \Rightarrow x_{k+1}(x_{k+1}^2 - x_{k+1} - m(m+1)) = 0$$

从而有 $x_{k+1} = 0, -m, m+1$

- $x_{k+1} = 0$ 时
$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n + x_{k+1} = \frac{m(m+1)}{2}$$
- $x_{k+1} = -m$ 时
$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n + x_{k+1} = \frac{m(m+1)}{2} - m = \frac{m(m-1)}{2}$$
- $x_{k+1} = m+1$ 时
$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n + x_{k+1} = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

所以 n=k+1 时命题成立，由数学归纳法知，命题成立;

$\Re$4 数形结合

很明显数形结合就是将一个领域的问题转化为几何学上的一个问题来解决，抑或是将几何学上的问题转化为一个代数的问题来解决，利用几何方法解决其他领域的问题，有时会显得特别的简单与简洁，我们通过具体的例子来说明这样一个方法的运用:

example 3 已知正数 a,b,c,A,B,C 满足 $a + A = b + B = c + C = k$，证明:

$$aB + bC + cA < k^2$$

solution 由题中三边相等，联想到等边三角形，于是可以构造边长为 k 的一个等边三角形 PQR，如 (Figure 3) 所示, 于是我们便有:

$$S_{\triangle LRM} = \frac{1}{2}aBsin60^\circ \qquad S_{\triangle MPN} = \frac{1}{2}bCsin60^\circ$$
$$S_{\triangle NQL} = \frac{1}{2}cAsin60^\circ \qquad S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2}k^2sin60^\circ$$

由图显然可以看出来有:

$$S_{\triangle LRM} + S_{\triangle MPN} + S_{\triangle NQL} \leq S_{\triangle PQR}$$

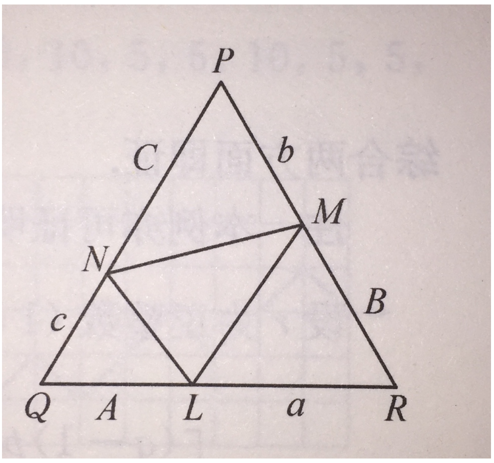

Figure 3: 例 3 图示

所以便有:

$$\frac{1}{2}aBsin60^\circ + S_{\triangle MPN} = \frac{1}{2}bCsin60^\circ + S_{\triangle NQL} = \frac{1}{2}cAsin60^\circ \le \frac{1}{2}k^2sin60^\circ$$

即有:

$$aB + bC + cA < k^2$$

example 4 证明对任意的实数 x，均有:

$$|\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}| < 1$$

example 5 设 a_i, b_i 均为正实数，证明如下的不等式成立，并且给出等号成立的条件:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2+b_n^2} \ge \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 + (b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}$$

$\Re$5 从整体考虑问题

在研究某些数学问题时，我们需要从整体特征出发来考虑问题，通过研究整体的结构，整体的形式来寻求问题的解决方案，这在圆椎曲线的解析计算中经常需要用到这样的方法，即在联立直线与圆锥曲线时，把两交点的坐标之和或坐标之积当作整体来考虑，而不需把每个坐标都解出来，我们还是通过几个具体的例子来说明怎么利用这样的方法。

example 6 设数列 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 满足: $a_1 = 1, b_1 = 3$ 且

$$a_{n+1} = a_n + b_n - \sqrt{a_n^2 - a_nb_n + b_n^2}$$
$$b_{n+1} = b_n + a_n + \sqrt{b_n^2 - b_na_n + a_n^2}$$

求数列 a_n, b_n 的通项公式。

solution 由已知条件可以得到:

$$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n - \sqrt{a_n^2 - a_nb_n + b_n^2} + b_n + a_n + \sqrt{b_n^2 - b_na_n + a_n^2} = 2(a_n + b_n)$$

所以有:

$$a_n + b_n = 2^{n-1}(a_1 + b_1) = 2^{n=1}$$

同样有:

$$a_{n+1}b_{n+1} = (a_n + b_n - \sqrt{a_n^2 - a_nb_n + b_n^2})(b_n + a_n + \sqrt{b_n^2 - b_na_n + a_n^2} = 2(a_n + b_n))$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_n+b_n)^2-(a_n^2-a_nb_n+b_n^2)\\
&= 3a_nb_n
\end{aligned}
$$

所以我们有:

$$a_nb_n = 3^{n-1}a_1b_1 = 3^n$$

从而有 a_n, b_n 为方程 $x^2-2^{n+1}x+3^n=0$ 的两个根，由题易知 $a_n < b_n$，所以可以得到:

$$a_n = 2^n-\sqrt{4^n-3^n} \qquad b_n = 2^n+\sqrt{4^n-3^n}$$

example 7 设 $x_1 < x_2$ 为方程 $x^2-\sqrt{7}x-1=0$ 的两个根，求 $5x_1+x_2$ 的值。

solution 首先举的这个例子比较简单，只是为了说明问题，当然可以直接把根解出来，但这不是我们强调的方法，我们可以换个角度来看这个问题，即我们可以设:

$$t_1 = 5x_1+x_2 \qquad t_2 = x_1+5x_2$$

那么我们便可以得到:

$$t_1+t_2 = 6(x_1+x_2) = 6\sqrt{7}$$

$$t_1-t_2 = 4(x_1-x_2) = -4\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = -4\sqrt{7+4} = -4\sqrt{11}$$

从而可以得到:

$$5x_1+x_2 = t_1 = \frac{t_1+t_2+t_1-t_2}{2} = \frac{6\sqrt{7}-4\sqrt{11}}{2} = 3\sqrt{7}-2\sqrt{11}$$

$\Re$6 递推法

通过建立递推关系解决问题的方法称为递推法，这种方法常用在排列组合的相关计算中。利用递推关系解决问题一般需要经历的过程如下所示:

- 用 a_n 表示与 n 有关的欲计数对象的个数
- 计算一些初始值 $a_0, a_1, a_2\cdots$
- 建立 a_n 与前面的 a_i 之间的递推关系
- 利用数列的方法求解递推关系

下面我们举一个具体的例子来说明如何利用这种方法解决数学问题:

example 8 设 n 为自然数且 n>1，求 $1,2,3,4,\cdots,n$ 的满足下列性质的排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的个数:

$$\exists! i\in\{1,2,3,\cdots,n-1\}, st \qquad a_i > a_{i+1}$$

solution 用 p_n 表示具有这个性质的排列的个数，则易知 $p_2=1$, 对于 $n\geq 3$，如果 $a_n=n$，则这样的排列个数有 p_{n-1} 个，如果 $a_n\neq n$，若 $a_i=n$, 那么考虑所有这样的排列，可以从 n-1 个数里面选 i-1 个按从小到达的顺序排成 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1}$, 其余的可以按从小到大排列在剩下的位置，于是有 C_{n-1}^{i-1} 种排法，所以我们有:

$$p_n = p_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^{i-1} = p_{n-1}+2^{n-1}-1$$

因此我们有:

$$
\begin{aligned}
p_n &= \sum_{i=2} n-1(p_{i+1}-p_i)+p_2\\
&= (2^{n-1}-1)+(2^{n-2}-1)+\cdots+(2^2-1)+1 = 2^n-2-(n-1) = 2^n-n-1
\end{aligned}
$$

$\Re$7 算两次

所谓算两次的方法就是通过不同的思路处理同一个问题然后再从中来建立等式来解决问题的方法。我们还是通过具体的例子来说明怎样利用算两次的方法来解决问题。

example 9 证明排列组合中的基本等式：

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

example 10 证明：

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6} = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + n \cdot 1$$

solution 我们来考虑怎样一个问题，在 n+2 个数（1，2，3，4，$\cdots$，n+2）里面选三个数的选法总数 S。一方面我们很容易得到：

$$S = C_{n+2}^3 = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$

另一方面，不妨设所选的三个数为 a，b，c（$1 \le a < b < c \le (n+1)$)，可以先选定 b，其中 $b \in \{2,3,4,\cdots,n+1\}$，然后再从 $\{1,2,3\cdots,b-1\}$ 里面选 a，从 $\{b+1,b+2,b+3,\cdots,n+2\}$ 里面选 c，一共有 (b-1)(n+2-b) 种可能，所以有：

$$S = \sum_{b=2}^{n+1}(b-1)(n+2-b) = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + n \cdot 1$$

因此便可以得到：

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6} = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + n \cdot 1$$

$\Re$8 逐步调整法

逐步调整法就是先对问题的一部分进行处理，再对另一部分进行处理从而得到问题的最终解决方案，此类方法经常用在求最值问题上，我们下面通过几个例子来说明这个方法的具体应用。

example 11 排序不等式的证明方法就是采用的局部调整的方法最后得以解决的，参见（15)。

example 12 设 A，B，C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，求 $sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$ 的最大值。

solution 先暂时固定 A，让 B，C 变动，先局部调整 B，C 使上式取最值：

$$\begin{aligned} u &= sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2} \\ &= sin\frac{A}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(cos\frac{B-C}{2} - cos\frac{B+C}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}sin\frac{A}{2}\left(cos\frac{B-C}{2} - sin\frac{A}{2}\right) \end{aligned}$$

显然当 B=C 时，$u = sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$ 局部最大，从而有：

$$u \le \frac{1}{2}sin\frac{A}{2}\left(1 - sin\frac{A}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left\{\frac{sin\frac{A}{2} + 1 - sin\frac{A}{2}}{2}\right\}^2 \le \frac{1}{8}$$

所以 $sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$ 的最大值为 $\frac{1}{8}$，并且此时 $A = B = C = 60°$

$\Re$9 构造法

所谓构造法，就是要么将题目条件里的关系式构造出来，或者将其运用到某个模型上，经过适当的变形得到新的易于处理的一种形式，构造法最著名的例子也许就是柯西不等式的一种证明方法了，对于一般

情况下的柯西不等式我们会提供另外的证明方法，参见（Equation 12), 我们现在来看看怎样利用构造法来处理其中一个最常用的形式的柯西不等式问题:

example 13 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2)^{\frac{1}{2}}$$

solution 首先我们可以对这个式子进行一个简单的变形，因为我们不太喜欢处理含根号的式子，所以我们将其变形如下:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

看到这个形式让我们可以联想到一元二次方程的判别式，所以我们可以在对其再进行一个变形:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

于是利用一元二次方程的判别式及证明下面的一元二次方程的判别式不会大于零:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

而另一方面:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

所以

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

自然成立，这便证明了柯西不等式。

$\Re$10 不变量与对称性

不变量法同构造法一样是一个很有技巧性的一个方法，我们可以通过寻找一个变化过程中的不变量来简化我们的讨论，又是甚至能直接一眼看出问题的答案，近现代数学中的黎曼几何中的整体几何的不变量思想，协变思想都与此有关，不变量思想是一个很重重要的思想，例如物理学中物理体系的平移不变性对应动量守恒，时间的均匀性对应能量守恒，物理体系的旋转不变形对应角动量守恒，物理体系的反射不变形对应于宇称守恒等都蕴含着不变量思想，不变量思想于对称性思想都是特别重要的一类思想。对此我们也通过一个例子来说明如何利用这些思想和方法。

example 14 设 A，B，C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，求 $sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$ 的最大值

solution 由 A，B，C 的对称性知，取最值时 $A = B = C = 60°$, 因此 $sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$ 的最大值为

$$(sin30°)^3 = \frac{1}{8}$$

example 15 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = 1, b_1 = 2$, 且

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}$$

$$b_{n+1}=\frac{1+b_n+a_nb_n}{a_n}$$

证明:

$$a_n<5$$

solution 由已知条件可以得到:

$$1+a_{n+1}=\frac{(1+a_n)(1+(b_n)}{b_n}\qquad 1+b_{n+1}=\frac{(1+a_n)(1+(b_n)}{a_n}$$

所以有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a_{n+1}}-\frac{1}{1+b_{n+1}}&=\frac{b_n-a_n}{(1+a_n)(1+(b_n)}\\&=\frac{(1+b_n)-(1+a_n)}{(1+a_n)(1+(b_n)}\\&=\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+b_n}\end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+b_n}$ 为一个不变量:

$$\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+b_n}=\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{1+b_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

因此有:

$$\frac{1}{1+a_n}>\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+b_n}=\frac{1}{6}$$

最后便可以得到:

$$a_n<5$$

§V 著名不等式专题

ℜ1 赫尔德不等式

考虑函数:

$$f(x)=x^{\alpha}-\alpha x(0<\alpha<1)$$

$$f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$$

由此可知:

$$f(x)\le f(1)=1-\alpha$$

取 $x=\frac{a}{b}$, 记 $\beta=1-\alpha$ 有:

$$\begin{aligned}&(\frac{a}{b})^{1-\beta}-(1-\beta)\frac{a}{b}\le 1-\alpha\\&\Rightarrow\frac{a^{1-\beta}}{b^{-\beta}}-\alpha a\le b\beta\\&\Rightarrow a^{\alpha}b^{\beta}\le a\alpha+b\beta\end{aligned}$$

由此可以得到赫尔德不等式:

$$a^{\alpha}b^{\beta}\le a\alpha+b\beta \tag{1}$$
$$0<\alpha,\beta<1\qquad \alpha+\beta=1$$

$\Re$2 詹森不等式

对于任意一个凸函数 f(x), 由图易知成立下面的不等式：

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2)\qquad 0\le q_1,q_2\le 1\qquad q_1+q_2=1$$

我们用数学归纳法将其推广到 n 个变量的时候，即我们猜测成立如下的不等式：

$$f(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n)$$
$$0\le q_1,q_2,\cdots,q_n\le 1\qquad q_1+q_2+\cdots+q_n=1$$
$$or$$
$$f(\sum_{i=1}^{n}q_ix_i)\le\sum_{i=1}^{n}q_if(x_i)$$
$$0\le q_i\le 1\qquad \sum_{i=1}^{n}q_i=1$$

下面用数学归纳法证明上述不等式，假设 n=k 时上式成立：

$$f(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_kx_k)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_kf(x_k)$$
$$0\le q_1,q_2,\cdots,q_k\le 1\qquad q_1+q_2+\cdots+q_k=1$$
$$or$$
$$f(\sum_{i=1}^{k}q_ix_i)\le\sum_{i=1}^{k}q_if(x_i)$$
$$0\le q_i\le 1\qquad \sum_{i=1}^{k}q_i=1$$

下面我们来看 n=k+1 时的情况，即需由上面的 n=k 时的不等式证明下面不等式：

$$f(q_1'x_1'+q_2'x_2'+\cdots+q_k'x_k'+q_{k+1}'x_{k+1}')\le q_1'f(x_1')+q_2'f(x_2')+\cdots+q_k'f(x_k')+q_{k+1}'f(x_{k+1}')$$
$$0\le q_1',q_2',\cdots,q_k',q_{k+1}'\le 1\qquad q_1'+q_2'+\cdots+q_k'+q_{k+1}'=1$$
$$or$$
$$f(\sum_{i=1}^{k+1}q_i'x_i')\le\sum_{i=1}^{k+1}q_i'f(x_i')$$
$$0\le q_i'\le 1\qquad \sum_{i=1}^{k+1}q_i'=1$$

为简化书写，我们略去上面中所有的撇 ($'$), 并一律写成求和形式。

$$\begin{aligned}
f(\sum_{i=1}^{k+1}q_ix_i)&=f(\sum_{i=1}^{k}q_ix_i+q_{k+1}x_{k=1})\\
&=f((\frac{\sum_{i=1}^{k}q_ix_i}{\sum_{i=1}^{k}q_i})\sum_{i=1}^{k}q_i+q_{k+1}x_{k=1})\\
&\le(\sum_{i=1}^{k}q_i)f(\frac{\sum_{i=1}^{k}q_ix_i}{\sum_{i=1}^{k}q_i})+q_{k+1}f(x_{k+1})\\
&=(\sum_{i=1}^{k}q_i)f(\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{\sum_{i=1}^{k}q_i}x_i)+q_{k+1}f(x_{k+1})
\end{aligned}$$

$$\le (\sum_{i=1}^{k} q_i)\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{\sum_{i=1}^{k} q_i}f(x_i)+q_{k+1}f(x_{k+1})$$
$$=(\sum_{i=1}^{k} q_i)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} q_i})\sum_{i=1}^{k} q_i f(x_i)+q_{k+1}f(x_{k+1})$$
$$=\sum_{i=1}^{k+1} q_i f(x_i)$$

即 n=k+1 时不等式确实成立，又由于 n=2 时成立，由归纳法知道不等式确实成立，由此得到著名的詹森不等式 [4]：

$$f(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i)\le \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) \tag{2}$$
$$0\le q_i\le 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i=1$$

若令 $q_i=\frac{p_i}{\sum_j p_j}$, 则，自然有 $\sum_{i=1}^{n} q_i=1$, 由此可将詹森不等式（2) 改写成为：

$$f(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i})\le \frac{\sum p_i f(x_i)}{\sum p_i} \tag{3}$$

同理，对于凹函数 f（x)，则有

$$f(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i})\ge \frac{\sum p_i f(x_i)}{\sum p_i} \tag{4}$$

ℜ3 多元均值不等式

∮1 调和平均数与几何平均数

考虑函数 f(x)=xln(x), 易知此函数为凸函数, 由詹森不等式，见公式（3）可知，

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} ln\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\le \frac{\sum p_i x_i ln x_i}{\sum p_i}$$

两边同时乘以 $\sum p_i$, 并取指数函数便有：

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\le (\prod_i x_i^{p_i x_i})^{\frac{1}{\sum p_i x_i}}$$

令 $p_i=\frac{1}{x_i}$, 则有：

$$\frac{n}{\sum\frac{1}{x_i}}\le (\prod_i x_i)^{\frac{1}{n}} \tag{5}$$
$$or$$
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\le (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \tag{6}$$

∮2 几何平均数与代数平均数

Part.A

取 f(x)=lnx, 则 f(x) 为凹函数，由凹函数的詹森不等式，见不等式（4), 可知：

$$ln\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\ge \frac{\sum p_i ln x_i}{\sum p_i}$$

对上公式取指数函数便有:

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \geq e^{\frac{\sum p_i ln x_i}{\sum p_i}}$$
$$= e^{\frac{ln \prod x_i^{p_i}}{\sum p_i}}$$
$$= e^{(ln \prod x_i^{p_i})^{\frac{1}{\sum p_i}}}$$
$$= (\prod x_i^{p_i})^{\frac{1}{\sum p_i}}$$

取 p_i=1, 便有:

$$\frac{\sum x_i}{n} \geq (\prod x_i)^{\frac{1}{n}} \tag{7}$$

Part.B

下面根据赫尔德不等式，见公式（1), 来证明代数平均数不小于几何平均数。

首先证明如下的不等式:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i q_i$$
$$a_i, q_i > 0, \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

用归纳法证明，假设 n=k 时上式成立，那么当 n=k=1 时便有:

$$\prod_{i=1}^{k+1} a_i^{q_i} = (\prod_{i=1}^{k} a_i^{\frac{q_i}{\sum_{i=1}^{k} q_i}})^{\sum_{i=1}^{k} q_i} a_{k+1}^{q_{k+1}}$$
$$\leq a_{k+1} q_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} q_i \prod_{i=1}^{k} a_i^{\frac{q_i}{\sum_{i=1}^{k} q_i}}$$
$$\leq a_{k+1} q_{k+1} + (\sum_{i=1}^{k} q_i) \dot{\sum}_{i=1}^{k} (\frac{q_i}{\sum_{i=1}^{k} q_i} a_i)$$
$$= a_{k+1} q_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} q_i a_i$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1} q_i a_i$$

有上式可知，n=k+1 时同样成立，由于 Holder 不等式即说明 n=2 时成立，所以，对任意的 n 成立如下不等式:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i q_i \tag{8}$$
$$a_i, q_i > 0, \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

取 $q_i = \frac{p_i}{\sum p_i}$ 便可改写上面的不等式:

$$(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i})^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} p_j}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i p_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j} \tag{9}$$

取 $p_j = 1$ 便有

$$(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \tag{10}$$

$\oint$3 代数平均数与平方平均数

首先根据柯西不等式，参见公式（12), 取 $b_i = 1$ 则有：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^{\frac{1}{k'}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

再取 k=k'=2, 便有如下的均值不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leq \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$\Re$4 柯西不等式

让我们继续换个方式推广 Holder 不等式，参见公式（1），猜测成立如下不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} {a_i}^k)^{\frac{1}{k}} (\sum_{i=1}^{n} {b_i}^{k'})^{\frac{1}{k'}}$$

$$a_i, b_i > 0, k, k' > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$$

Part.A

首先我们仍然考虑利用詹森不等式, 见公式（3)，考虑特殊的凸函数来证明此结论：为此我们知道函数 $f(x) = x^k$, 在 k>1 时，明显为凸函数，因此我们有：

$$(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i})^k \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^k}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

由此有：

$$(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i)^k \leq (\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^k)(\sum_{i=1}^{n} p_i)^{k-1}$$

取 $p_i = b_i^{\frac{k}{k-1}}, x_i = \frac{a_i}{b_i^{\frac{1}{k-1}}}$ 带入上面的式子有：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} {a_i}^k)^{\frac{1}{k}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{k}{k-1}})^{\frac{k-1}{k}}$$

令 $k' = \frac{k}{k-1}$, 则有 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} = 1$, 由此得到著名的柯西不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} {a_i}^k)^{\frac{1}{k}} (\sum_{i=1}^{n} {b_i}^{k'})^{\frac{1}{k'}} \tag{12}$$

$$a_i, b_i > 0, k, k' > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$$

Part.B

先证明一个此不等式的一的特殊情形：

$$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^k = \sum_{i=1}^{n} {b_i}^{k'} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq 1$$

上面的不等式证明也很简单，由 Holder 不等式，参见公式（1），两边求和便有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &\leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} a_i^k + \frac{1}{k'}\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'} \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \\ &= 1\end{aligned}$$

重新引入新数：

$$a_i' = \frac{a_i}{(\sum_{j=1}^{n} a_j^k)^{\frac{1}{k}}}, b_i' = \frac{b_i}{(\sum_{j=1}^{n} b_j^{k'})^{\frac{1}{k'}}}$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} {a_i'}^k = \sum_{i=1}^{n} {b_i'}^{k'} = 1$$

从而有：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(\sum_{j=1}^{n} a_j^k)^{\frac{1}{k}}} \times \frac{b_i}{(\sum_{j=1}^{n} b_j^{k'})^{\frac{1}{k'}}} \leq 1$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} {a_i}^k)^{\frac{1}{k}} (\sum_{i=1}^{n} {b_i}^{k'})^{\frac{1}{k'}}$$

$\Re$5 闵可夫斯基不等式

有了柯西不等式，我们便能由此推出闵可夫斯基不等式，首先从柯西不等式出发，参见公式（12), 我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{k-1} a_i + \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{k-1} b_i \\ &\leq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(k-1)k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(k-1)k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(k-1)k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} \left\{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}\right\} \\ &= \left\{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}\right\} \left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k'}}\end{aligned}$$

对上面的式子约分掉公因子便有：

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \tag{13}$$

$\Re$6 阿贝尔变换与排序不等式

Part.A 阿贝尔变换.

考虑一组数的求和，其中每个数都是两个数的乘积，即考虑如下的求和式子：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

我们可以重新定义一组数来改变求和方式，为此，我们定义如下的数：

$$B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i, k = 1, 2, 3, \cdots, n$$

由此便有：

$$b_i = B_i - B_{i-1}, i = 2, 3, 4, \cdots, n$$

于是最开始的求和式子可以变成：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=2}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) + a_1 B_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_i - a_{i+1}) + a_n B_n \end{aligned} \tag{14}$$

上诉式子便是著名的阿贝尔变换。

Part.B 排序不等式

首先我们给出排序不等式具体形式：

$$\begin{aligned} suppose\ that: a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n \\ such\ that: \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge \sum_{i=1}^{n} a_i b_{j_i} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i} \end{aligned} \tag{15}$$

下面我们来证明排序不等式（15), 对任意的求和项，改变求和项顺序使得求和项中 a_i 的排列顺序满足 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, 记两个求和项中 b_i 依次分别为 b_{i_1}, b_{i_2}, 利用阿贝尔变换则有：

$$\begin{aligned} S_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{i_1} = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_{i_1}(a_{i+1} - a_i) \qquad with: B_{k_1} = \sum_{i=1}^{k} b_{i_1} \\ S_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{i_2} = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_{i_2}(a_{i+1} - a_i) \qquad with: B_{k_2} = \sum_{i=1}^{k} b_{i_2} \end{aligned}$$

因此有：

$$S_1 - S_2 = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(B_{i_2} - B_{i_1})$$

由于 $a_{i+1} - a_i \ge 0$, 因此考虑两个序列如下所示：

$$\begin{aligned} b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{i-2}, b_{i-1}, b_i, b_{i+1} \cdots, b_n \\ b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{i-2}, b_i, b_{i-1}, b_{i+1} \cdots, b_n \end{aligned}$$

对这两个序列有：

$$B_{k_2} - B_{k_1} = \begin{cases} 0, & k \ne i-1 \\ b_i - b_{i-1}, & k = i-1 \end{cases}$$

于是便有：

$$if\ b_i > b_{i-1} \Rightarrow S_1 - S_2 = (a_i - a_{i-1})(b_i - b_{i-1}) > 0 \Rightarrow S_1 > S_2$$

$$if\ b_i < b_{i-1} \Rightarrow S_1 - S_2 = (a_i - a_{i-1})(b_i - b_{i-1}) < 0 \Rightarrow S_1 < S_2$$

于是便知不等式（15) 成立.

ℜ7 切比雪夫不等式

有了排序不等式，见式子（15), 我们便可以很容易证明切比雪夫不等式. 首先由排序不等式我们有:

$$\begin{gathered} if: a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \\ we\ have: \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{i+k}, k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1 \end{gathered}$$

把上面的式子全部相加便有:

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i \right\}$$

整理便有:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \geq \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \right\} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n} \right\} \tag{16}$$

上面的式子（16) 便是切比雪夫不等式。

ℜ8 幂加权不等式

还是利用凸函数的 Jansen 不等式，我通过构造凸函数来得到这个不等式，当 a>b>0, 且 x>0 时便有函数 $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$ 是凸函数，于是由詹森不等式，参见（3), 便有:

$$\left\{ \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \right\}^{\frac{a}{b}} \leq \frac{\sum p_i x_i^{\frac{a}{b}}}{\sum p_i}$$

取 $p_i = 1$ 便有:

$$\left\{ \frac{\sum x_i}{n} \right\}^{\frac{1}{b}} \leq \left\{ \frac{\sum x_i^{\frac{a}{b}}}{n} \right\}^{\frac{1}{a}}$$

再取 $x_i = x_i^b$ 便有

$$\left\{ \frac{\sum x_i^b}{n} \right\}^{\frac{1}{b}} \leq \left\{ \frac{\sum x_i^a}{n} \right\}^{\frac{1}{a}}$$

于是便得到了著名的幂加权不等式:

$$\begin{gathered} when:\ a > b > 0, x > 0 \\ \left\{ \frac{\sum x_i^b}{n} \right\}^{\frac{1}{b}} \leq \left\{ \frac{\sum x_i^a}{n} \right\}^{\frac{1}{a}} \end{gathered} \tag{17}$$

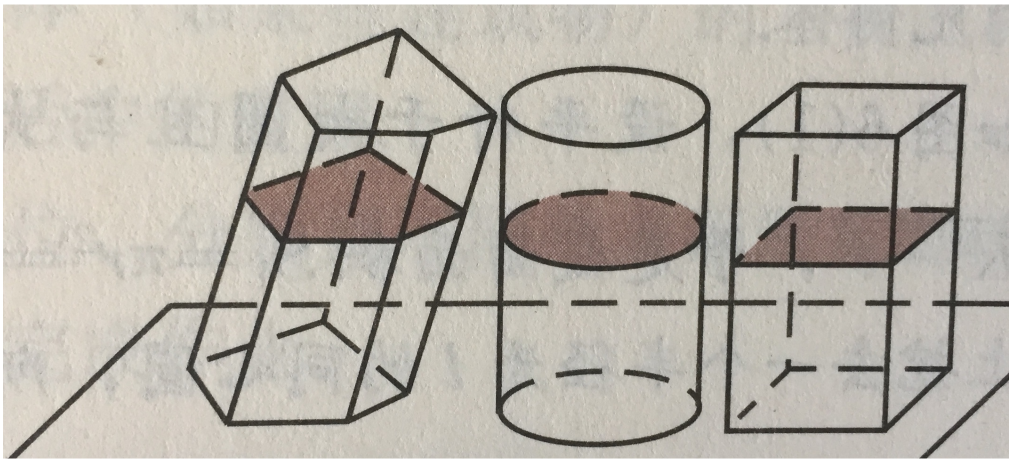

Figure 4: 柱体体积公式推导图示

§VI 祖亘原理

祖亘原理是中国古代数学的一个重要成就，祖亘是祖冲之之子，其提出的"幂势既同，则体积不容异"的原理为计算球体积以及柱体和椎体的体积提供了理论依据。此原理的意思是说，如果两个等高的几何体在同高处截得的两几何体的截面积相等，那么这两个几何体的体积就是相等的。从现代数学的角度来看，这个原理有其深厚的内涵，是数学史上的一个奇迹，因为其背后代表的是定积分（黎曼和）的存在性，而黎曼和的存在性在数学上本身就是一个奇迹。下面我们来说明其主要的一些应用。

$\Re$1 祖亘原理与柱体的体积

首先让我们来看一看柱体的体积，为此我们可以考虑两个任意的柱体，再取一个长方体，假设这些柱体的底面积和高都相等，如 (Figure 4) 所示，由柱体的定义我们便可以知道这几个柱体的任意等高处的截面积都是相等的，由祖亘原理知他们的体积是一样的，再由长方体的体积公式便可以得到所有的柱体的体积公式为：

$$V = Sh$$

$\Re$2 祖亘原理与椎体的体积公式

同样我们可以研究锥体，只要锥体的底面积相等以及高相等，那么由相似的性质便可以知道他们两者在任意等高处的截面积都是相等的，所以可以得到这两个锥体的体积是一样的，如 (Figure 5), 为了得到锥体的体积的具体的表达式，我们可以参见（Figure 6), 很容易证明一个柱体可以拆分成三个等体积的锥体，因此我们便得到了锥体的体积公式：

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

$\Re$3 祖亘原理与球体积公式

利用祖亘原理我们同样可以得到球体积的公式，参见 (Figure 7), 我们考虑半球，为此我们考虑与半球底面等面积且高相等的一个圆柱，在其内部倒着放置一个等底面的圆锥。设球的半径为 R，于是我们可

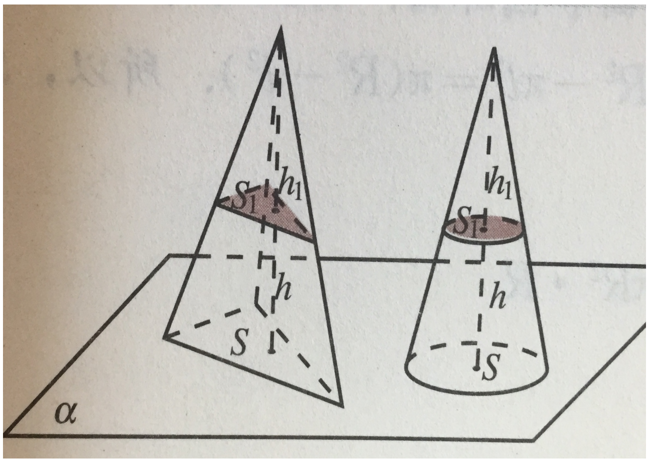

Figure 5: 锥体体积

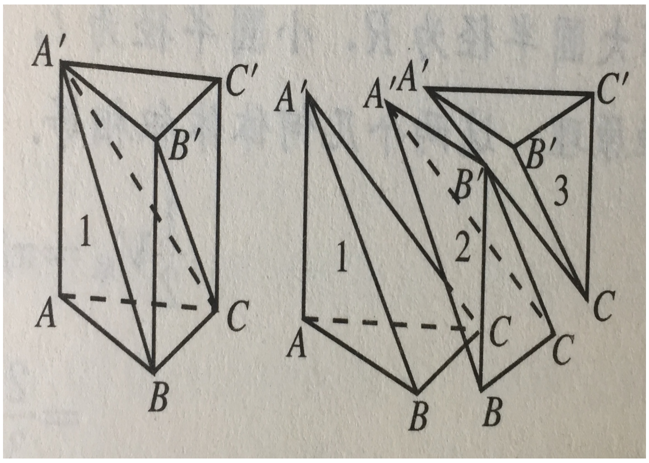

Figure 6: 锥体体积

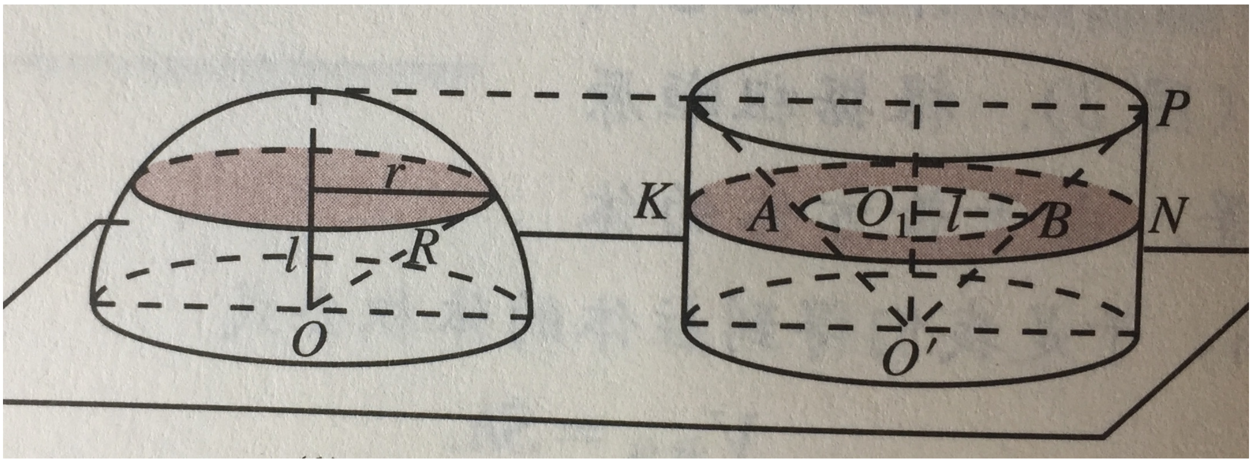

Figure 7: 球体积公式图示

以得到，在高 l 处球的截面积为：

$$S_1 = \pi(R^2 - l^2)$$

对于我们构造的那个图形，其高为 l 处的截面积为：

$$S_2 = \pi r^2 - \pi l^2$$

由此有两个图形的等高处的截面积相等，因此便知其体积相等，所以半球的体积为：

$$V_{\frac{1}{2}} = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

最后我们便可以得到球的体积为：

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

§VII 海伦-秦九韶公式

考虑一个三角形 ABC，边 AB，AC，BC 的长度分别为 c,b,a，于是由余弦定理有：

$$cosA = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

于是由三角形的面积公式便有：

$$
\begin{aligned}
S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2}bcsinA \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-cos^2A} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc})^2} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2c^2b^2+2a^2c^2}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2c^2b^2+2a^2c^2}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}} \\
&= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad p=\frac{a+b+c}{2}
\end{aligned}
$$

由此得到著名的海伦-秦九韶公式：

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad p=\frac{a+b+c}{2} \tag{18}$$

§VIII 虚数的存在性

由于高中要求复数的内容，但高中老师基本上不讲什么是复数，他们不讲为什么负数开根号仍然是有意义的，这些高中老师都没有讲清楚，为此我需要把这件事情说清楚，为什么负数可以开根号。首先我们要来说一说数学存在和物理存在的区别；数学是一个抽象思维的学科，数学的一切都是从定义出发，我们可以定义很多的东西，如果从这些定义出发经过严密的逻辑推导整个体系自身是严密的是不自相矛盾的，是自洽的, 而且与其他已知的存在的体系是不自相矛盾的，那么我们就说这个东西在数学上是存在的。比如我们可以定义：

$$1+1=0$$

这样定义是可以的，但其存在性是需要讨论的，很显然如果那样定义之后，我们有：

$$2=2+0=2+1+1=3+1=4$$

这样我们便推出了矛盾，所以我们就说这样的等式 $1+1=0$ 是不存在的，在数学上是不存在的，因为由此出发我们推出了自相矛盾的等式。
而物理存在与数学存在则不一样，物理存在不仅要求体系自身是不自相矛盾的，而且另外一方面它还要能经受实验的检验，因为对于物理问题我们可以通过实验检验其正确与否，这就是数学存在与物理存在的区别。
数学家已经证明了，完备的数系只有三种，一元数系 (实数), 二元数系 (复数), 四元数系，也就是说，这些数系的定义是完备的，在数学上他们是存在的，负数在一元数系里面是不能开根号的，也就是说 $\sqrt{-1}$ 在一元数系里是不存在的，但他在二元数系里面是存在的，即在二元数系里面负数是可以开根号的，而且是有意义的，我们详细叙述如下：

Definition 0 设 a_1, a_2, b_1, b_2 是我们常见的数（实数)，定义新的数以及他们的运算加法和乘法，新的数计作：(a,b), 新的加法和乘法定义为：

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$$

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$$

比如

$$(1,2)+(3,4)=(1+3,2+4)=(4,6)$$

$$(1,2)\cdot(3,4)=(1\cdot3-2\cdot4,1\cdot4+2\cdot3)=(-3,7)$$

由此我们定义了一个新的数，称为二元数，可以证明这个新定义的数与已知的自洽的数学体系是不相矛盾的，而且其自身也是不相矛盾的，因而他们在数学上是存在的。我们把二元数中这类数 $(a,0)$，即第二个分量为零的数计作 a, 即

$$(a,0)=a$$

于是我们就有:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot0-1\cdot1,0\cdot1+1\cdot0)=(-1,0)=-1$$

即有

$$(0,1)^2=-1$$

因此我们有:

$$\sqrt{-1}=(0,1)$$

即在这个二元数系里面我们可以看到负数是可以看根号的，而且其根号是有意义的，是实实在在的数学存在。我们用一个符号表示这个特殊的数:

$$(0,1)=i$$

因此便有:

$$\sqrt{-1}=\pm i$$

从而便有:

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+(b,0)\cdot(0,1)=a+bi$$

假设有两个数 $(a,b),(c,d)$，那么按照我们的定义有:

$$(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)\qquad(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

按照我们的符号约定那么有:

$$(a,b)+(c,d)=(a+b)+(c+d)i\qquad(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

另一方面我们在运算前利用我们的符号约定，并且运算时将 i 看作字母，左后将 i^2 换做-1，因次我们有:

$$(a,b)+(c,d)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

于是按照我们的符号约定

$$(a,0)=a,(0,1)=i$$

二元数可以表示成为 $a+bi$ 的形式, 其运算也可以按照常见的表达式的计算规则来计算我们新定义的运算，这便是复数。因此复数是真真切切存在的，对负数开根号是有意义的，不过是在新定义的运算下有意义的，在新定义的二元数上是有意义的！而在一元数系下是没有意义的，即在一元数系下

$$\sqrt{-1}$$

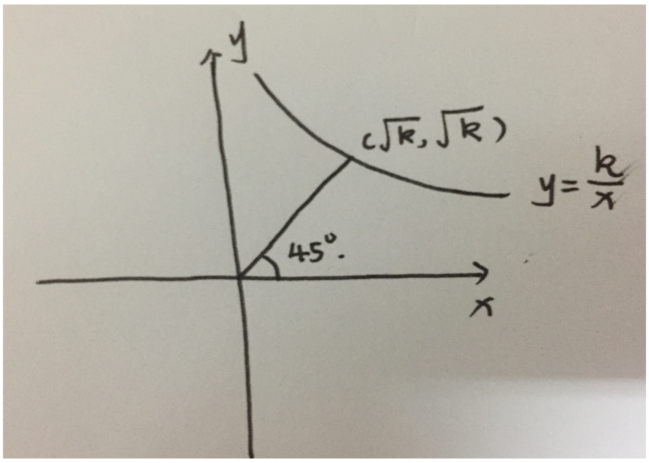

Figure 8: 反比例函数图示

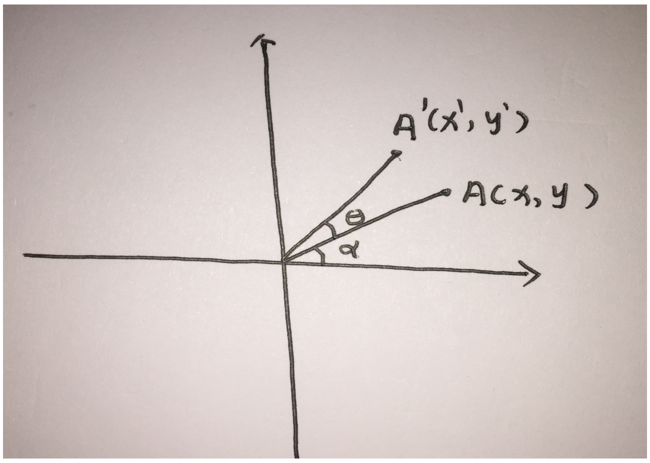

Figure 9: 坐标旋转图示

是没有意义的，但在二元数系下

$$\sqrt{-1} = \sqrt{(-1,0)} = \pm(0,1) = \pm i$$

他才是有意义的。这些内容便是高中老师不会给你们讲明白的内容，也是我上高中的时候感觉很奇怪的内容，特此补充于此希望你们能明白。希望你们能明白数学存在的意义，及其数学存在与物理存在的区别。

§IX 反比例函数与双曲线

也许很多人都有个疑问，为什么反比例函数也被称为双曲线，为此我们需要解释这个事情，并且讲一讲坐标系的旋转。为此我们假设我们所需要研究的反比例函数为：

$$y = \frac{k}{x}$$

首先我们找出反比例函数上到原点距离最近的点，即有：

$$l = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\frac{k^2}{x^2} + x^2} \leq \sqrt{2k}$$

等号成立是有：

$$x^2 = \sqrt{\frac{k^2}{1}} = k$$

因此点 $(\sqrt{k}.\sqrt{k})$ 到原点的距离最近，如（Figure 8) 所示。下面我们来看看将坐标系逆时针旋转 45° 后反比例函数的方程如何变化，为此我们首先研究将一个线段旋转一定角度后点的坐标如何变化，为此，参见图（Figure 9), 假设将 OA 逆时针旋转 θ 度后得到 OA'，设 A'(x',y')，那么有:

$$x' = rcos(\theta + \alpha) = rcos\theta cos\alpha - rsin\theta sin\alpha$$
$$y' = rsin(\theta + \alpha) = rsin\theta cos\alpha + rcos\theta sin\alpha$$

又由于:

$$rcos\alpha = x \qquad rsin\alpha = y$$

因此有:

$$x' = rcos\theta cos\alpha - rsin\theta sin\alpha = xcos\theta - ysin\theta$$
$$y' = rsin\theta cos\alpha + rcos\theta sin\alpha = xsin\theta + ycos\theta$$

于是便得到了坐标旋转的变换关系，因此我们将反比例函数中的坐标系逆时针旋转 45 度，即相当于将点顺时针旋转 45 度，由此得到旋转后的点的坐标为：

$$x' = xcos\theta - ysin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$
$$y' = xsin\theta + ycos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$$

由于

$$y = \frac{k}{x}$$

所以我们需要反解出 x，y 然后带入反比例函数才能得到新的坐标系下的反比例函数的方程，于是我们有：

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') &= k \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) &= k \\ \Rightarrow \frac{x'^2}{2k} - \frac{y'^2}{2k} &= 1 \end{aligned}$$

由此我们可以看到，在新的坐标系下反比例函数的方程变成了双曲线的方程，但曲线的形状是不依赖于所选取的坐标系的，因此反比例函数本质上就是双曲线，这也是我们将反比例函数称为双曲线的原因。

参考文献

All the references are listed below:

[1] 熊斌何忆捷. *高中数学竞赛中的解题方法和策略*. 数学奥林匹克小丛书. 华东师范大学出版社, 2012.

[2] 范后宏. *数学思想要义*. 北京大学出版社, 2018.

[3] 莫里斯 · 克莱因. *古今数学思想 (第一卷)*. 上海科学技术出版社, 2014.

[4] 菲赫金哥尔兹. *微积分学教程 (第一卷)*. 俄罗斯教材选译. 高等教育出版社, 2014.